

Gruppentheorie

Damian Osajda

damian.osajda@univie.ac.at

<http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/GGTWien/dyd/Course.html>

Dienstag, 12:45–13:30

Seminarraum 11 Oskar-Morgenstern-Platz 1 2.Stock

Blatt 6

Satz (P. Hall). *Sei G eine auflösbare Gruppe mit $|G| = ab$, wo $\gcd(a, b) = 1$. Dann besitzt G eine Untergruppe der Ordnung a und je zwei solche Untergruppen sind konjugiert in G .*

- (1) (*Frattini-Argument*) Sei F eine endliche Gruppe, H eine normale Untergruppe von F , und P eine Sylow p -Untergruppe von H . Zeige, daß $F = N_F(P)H$.
- (2) Sei H eine minimale normale Untergruppe von G . Zeige, daß:
 - (a) $H^{(1)} = \{1\}$ oder $H^{(1)} = H$;
 - (b) $H^{(1)} = \{1\}$, insbesondere H ist abelsch;
 - (c) $H = \mathbb{Z}_p^k$.
- (3) Sei H eine normale Untergruppe von G mit $|H| = a'b'$, wo $a'|a$, $b'|b$ und $b' < b$. Sei G/H besitzt eine Untergruppe der Ordnung a/a' . Zeige, daß es eine Untergruppe von G der Ordnung a gibt.
- (4) Sei $H \triangleleft G$ mit $b \nmid |H|$. Dann besitzt G eine Untergruppe der Ordnung a .
- (5) Sei $|G| = ap^m$ mit $p \nmid a$. Sei $H \triangleleft G$ eine p -Sylow-Untergruppe, die einzelne minimale normale Untergruppe ist.
 - (a) Sei K/H eine minimale normale Untergruppe von G/H . Zeige, daß $|K| = p^m q^n$, für ein Primzahl $q \neq p$;
 - (b) Sei Q eine q -Sylow-Untergruppe von K . Zeige, daß $K = HQ$;
 - (c) Zeige, daß $G = KN_G(Q)$;
 - (d) Zeige, daß $|N_G(Q)| = a|H \cap N_K(Q)|$;
 - (e) Zeige, daß $H \cap N_K(Q) < Z(K)$;
 - (f) Zeige, daß $Z(K) = \{1\}$;
 - (g) Zeige, daß $|N_G(Q)| = a$.
- (6) Zeige, daß G besitzt eine Untergruppe der Ordnung a .